МЕХАНИКА
MECHANICS

CC BY

Check for updates

УДК 531.383
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2202

Оригинальное теоретическое исследование

Оптический метод идентификации несовершенств материала в заготовке резонатора волнового твердотельного гироскопа

С.А. Шевченко ✉, **И.А. Попов**, **Б.Е. Мельников**
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация
✉ shevchenko.sergei.a@yandex.ru

EDN: TVJRQI

Аннотация

Введение. Создание высокоточных систем ориентации нового поколения с улучшенными техническими характеристиками остаётся ключевой задачей точного приборостроения — это необходимо для надёжной работы подвижных объектов длительного срока эксплуатации. Одним из перспективных путей является применение датчиков, основанных на эффекте Брайана (волновой твердотельный гироскоп, ВТГ), которые показывают существенные преимущества по стабильности характеристик в условиях внешних факторов. За последние 10 лет зарубежные и отечественные исследования достигли заметных успехов в повышении целевых параметров ВТГ, однако определенные проблемы совершенствования остаются открытыми. Так, в литературе уделяется внимание снижению погрешностей измерения ВГТ за счёт компенсации влияния несовершенств резонатора, но чаще эти методы применимы на стадиях после формообразования. Недостаточно разработаны методы ранней идентификации неоднородностей материала (разноплотности) на этапе контроля заготовок, что создаёт пробел в технологической цепочке и снижает эффективность последующей балансировки и калибровки. Цель работы — разработать метод идентификации разноплотности резонатора на ранней технологической стадии — на этапе контроля заготовки.

Материалы и методы. Рассматривается оптически прозрачный материал — кварцевое стекло, являющееся наиболее распространённым материалом для изготовления резонаторов ВТГ, в частности марка КУ-1. Метод идентификации основан на связи оптических свойств кварцевого стекла (коэффициента поглощения) с искомым объёмным распределением плотности заготовки. Проведён виртуальный эксперимент, включающий формирование и решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) по результатам серии измерений интенсивности светового пучка, прошедшего через заготовку. Для описания распределения плотности использована полиномиальная аппроксимация, что повышает робастность метода. Решение СЛАУ получено через поиск псевдорешения методом наименьших квадратов на базе сингулярного разложения.

Результаты исследования. Разработан метод идентификации разноплотности кварцевого стекла на этапе контроля качества технологической заготовки резонатора ВТГ. Получено искомое распределение плотности кварцевого стекла по объёму заготовки, совпадающее с «истинным» — отклонение не превышает 5 %. Оценена чувствительность метода к наличию макродефектов в объёме заготовки — пор, пузырьков и пр.

Обсуждение. Результаты показывают, что применение предложенного метода позволяет эффективно контролировать разноплотность заготовок и оптимизировать технологию производства резонаторов, обеспечивая повышение результативности процессов минимизации влияния несовершенств на их характеристики. Виртуальные эксперименты продемонстрировали, что измерение интенсивности светового луча, прошедшего через заготовку, позволяет восстановить распределение коэффициента поглощения и плотности с точностью не менее 0,005 %. Созданная система линейных алгебраических уравнений обеспечила возможность определения этих параметров по объему. Подчеркнуты некоторые особенности, касающиеся решения неопределенных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Пристальное внимание уделено необходимости контроля соотношения между количеством корней и неизвестных для получения устойчивого решения.

© Шевченко С.А., Попов И.А., Мельников Б.Е., 2025

Заключение. Предложенный метод идентификации разноплотности кварцевого стекла на этапе контроля качества заготовки при производстве резонаторов ВТГ показывает высокую эффективность и точность. Метод позволяет адекватно описывать функцию распределения и гибко настраивать оптимальную размерность СЛАУ, напрямую связанную с объёмом проводимых экспериментов. Полученные результаты подтверждают применимость оптических характеристик материала для контроля объёмного распределения плотности, что даёт возможность улучшить контроль заготовок и оптимизировать производственные процессы. Требуемая точность измерений, обусловленная уровнем разноплотности, влияющим на характеристики ВТГ, практически достижима, что свидетельствует о реальной возможности внедрения метода в производстве. Данный подход может быть использован в последующих исследованиях и разработках высокоточных систем, способствуя прогрессу в точном приборостроении и повышению качества выпускаемой продукции.

Ключевые слова: ВТГ, полусферический резонатор, идентификация, расщепление частоты, несовершенства, оптика, метод наименьших квадратов

Благодарности. Авторы благодарят А.В. Лукина, кандидата физико-математических наук, доцента ВШ МПУ СПБПУ и А.Н. Беляева, старшего преподавателя БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, проводивших экспертные интервью совместно с авторами статьи.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №25-21-00278, https://rscf.ru/project/25-21-00278/

Для цитирования. Шевченко С.А., Попов И.А., Мельников Б.Е. Оптический метод идентификации несовершенств материала в заготовке резонатора волнового твердотельного гироскопа. *Advanced Engineering Research* (*Rostov-on-Don*). 2025;25(4):311–323. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2202

Original Theoretical Research

Optical Method for Material Imperfections Identification in the Resonator Workpiece of Hemispherical Vibratory Gyroscope

Sergei A. Shevchenko ✉, **Ivan A. Popov**, **Boris E. Melnikov**
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation
✉ shevchenko.sergei.a@yandex.ru

Abstract

Introduction. The implementation of high-precision attitude control systems of a new generation with improved technical characteristics remains a key task in precision instrumentation — this is required for the reliable operation of moving objects with a long service life. One of the promising ways is the use of sensors based on the Bryan effect (hemispherical resonator gyroscopes, HRG),), which show significant advantages in stability of characteristics under external factors. Over the past 10 years, foreign and domestic research has reached noticeable success in increasing the target parameters of HRG, however, certain improvement problems remain open. Thus, in the literature, attention is paid to reducing the errors in measuring the HRG through compensating for the impact of imperfections of the resonator, but more often these methods are applicable at stages after geometry generation. Methods for early identification of material inhomogeneities (density variation) during workpiece inspection are insufficiently developed, creating a gap in the process chain and reducing the efficiency of subsequent balancing and calibration. The objective of this study is to develop a method for identifying resonator density variations at an early stage of the process — during workpiece inspection.

Materials and Methods. An optically transparent material is considered – fused quartz glass, which is the most common material for making a HRG resonator, in particular, the KU-1 brand (foreign analogs — Corning HPFS 7980, JGS1). The identification method is based on the relationship of the optical properties of quartz glass (absorption coefficient) with the desired density distribution over the volume of the workpiece. A virtual experiment was conducted, which consisted in the formation and resolution of a system of linear algebraic equations (SLAE) based on the measurements series results of a light beam intensity passing through a workpiece. A polynomial approximation was used to describe the density distribution in order to increase the robustness of the method. The SLAE roots were obtained through finding a pseudosolution by the least square method based on the singular value decomposition.

Results. A method for identifying the density variation of quartz glass at the stage of quality control of the technological workpiece of the HRG resonator was developed. The desired density distribution of quartz glass over the volume of the workpiece was obtained, coinciding with the “true” one — the difference was no more than 5%. The sensitivity of the method to the presence of macrodefects in the volume of the workpiece (pores, bubbles, etc.) was assessed.

Discussion. The results show that the proposed method can effectively control the density variation of the workpieces and optimize the resonator production, thereby improving the efficiency of the processes and minimizing the impact of imperfections on their characteristics. Virtual experiments have demonstrated that measuring the light beam intensity passing through the workpiece allows for the accurate reconstruction of the absorption coefficient and density distribution with an accuracy of at least 0.005%. The developed system of linear algebraic equations (SLAE) makes it possible to determine these parameters by volume. The paper highlights some features related to solving uncertain SLAE. Particular attention is paid to the need to control the ratio between the number of roots and unknowns to obtain a stable solution.
Conclusion. The proposed method for identifying the density variation of quartz glass at the stage of workpiece quality control in the production of HRG resonators demonstrates high efficiency and accuracy. The presented method has high accuracy for describing the distribution function, and is also flexible in terms of obtaining the optimal dimension of the SLAE, which is directly related to the number of experiments performed. The obtained results confirm the applicability of the material optical properties for controlling the density distribution over the volume, which allows for improved control of workpieces and optimization of production processes. The required measurement accuracy, determined by the level of density variation that affects the HRG characteristics, is practically achievable, which indicates that the method can be used in the manufacturing process. This approach can be applied in future research and development of high-precision systems, which will contribute to progress in the precision instrumentation industry and improve the quality of manufactured products.

Keywords: HRG, hemispherical resonator, identification, frequency splitting, imperfections, optics, least squares method

Acknowledgements. The authors would like to thank A.V. Lukin, Cand.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor at the Higher School of Mechanics and Control Processes, SPbPU, and A.N. Belyaev, Senior Lecturer of Department of Deformable Solid Mechanics, BSTU “VOENMEKH” named after D.F. Ustinov, who conducted expert interviews together with the authors of the article.

Funding Information. The research was supported by the Russian Science Foundation (grant no. 25-21-00278), https://rscf.ru/project/25-21-00278/

For Citation. Shevchenko SA, Popov IA, Melnikov BE. Optical Method for Material Imperfections Identification in the Resonator Workpiece of Hemispherical Vibratory Gyroscope. *Advanced Engineering Research* (*Rostov-on-Don*). 2025;25(4):311–323. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2202

Введение. В настоящий момент сохраняет свою актуальность направление разработки высокоточных систем определения положения тел в пространстве (навигационные комплексы, НК), основанных на датчиках (волновые твердотельные гироскопы, ВТГ), принцип действия которых связан с эффектом прецессии упругой волны (эффект Брайана) — ВТГ [1, 2]. Актуальность применения ВТГ для построения НК различного назначения прежде всего обусловлена очевидными преимуществами таких приборов по сравнению с устройствами, использующими иные физические принципы: лучшими массогабаритными характеристиками, устойчивостью к механическим воздействиям, энергоэффективностью, большим ресурсом и временем готовности и др. [3]. В условиях тенденции к увеличению требуемого назначенного ресурса при создании новых подвижных объектов перечисленные преимущества дают возможность увеличить массу полезной нагрузки, оптимизировать компоновку и, что важнее, снизить накопленную погрешность НК и нагрузку на энергетические системы.

С развитием методов проектирования и моделирования, а также технологий изготовления ВТГ улучшаются и их технические характеристики, что позволяет создавать НК различных классов точности и, соответственно, применять их в самых разных областях науки и техники, в том числе в космическом приборостроении [4]. Большое число работ, опубликованных ведущими отечественными научными коллективами, посвящено вопросам разработки, конструирования и технологии изготовления ВТГ [5]. Это стимулируется как достижениями иностранных компаний в части реализованных технических показателей ВТГ [6], так и созданием НК на их основе [7].

Несмотря на фундаментальные труды и передовые результаты наших соотечественников и их учеников — академиков В.Ф. Журавлева и Д.М. Климова [8], профессоров Б.С. Лунина, М.А. Басараба и В.А. Матвеева [9], И.В. Меркурьева [10], К.В. Шишакова [4] — а также достижения зарубежных групп под руководством D.D. Lynch [11], D. Roselle [12], B.J. Shaw [13], S. Zotov, A. Trusov и A. Shkel [14] — остаются направления и способы дальнейшего совершенствования ВТГ. Это позволяет следовать передовому тренду современного точного приборостроения — разработке высокоточных НК, на базе различных чувствительных элементов [1], [15], в том числе на базе ВТГ [16].

Одним из направлений является минимизация влияния несовершенств главного чувствительного элемента ВТГ — резонатора [8] на ключевые параметры изделия, в частности на расщепление его рабочей собственной частоты [9]. При обсуждении влияния несовершенств встает вопрос о способе их идентификации. Большинство существующих работ и исследований [3], [5] посвящены оценке уровня несовершенства и его компенсации на этапах механической и электрической балансировки; при этом практически отсутствуют исследования, предлагающие методику идентификации на более ранних стадиях производства, например, при контроле качества технологической заготовки. Возможность определения функции распределения свойств материала, например, плотности, по объему на стадии отбора заготовок позволяет сократить производственные затраты за счет селекции по критерию допустимой величины амплитуды несовершенства и выбора оптимального направления формообразования. Это, в свою очередь, уменьшает продолжительность технологического цикла механической балансировки и, как следствие, снижает расщепление рабочей частоты. Необходимость контроля разноплотности дополнительно продиктована существующими методами оценки качества материала, которые ориентированы на его основное применение — кварцевое стекло прежде всего рассматривается как оптический материал, поэтому фокус контроля смещен в сторону соответствующих параметров.[1] Однако, рассматривая кварцевое стекло как материал чувствительного элемента ВТГ, целесообразно контролировать свойства и их распределение по объему, определяющие динамические характеристики (плотность, модуль упругости и др.). В связи с этим в настоящей работе предлагается методика идентификации разноплотности, которой ранее не было.

Цель настоящей работы — разработка метода идентификации несовершенства типа «разноплотность» на основе измерения оптических свойств материала резонатора ВТГ, предназначенного для использования на этапе контроля качества технологической заготовки резонатора. В рамках работы будет проверена возможность определения функции распределения плотности по объему посредством прямого измерения интенсивности светового луча, прошедшего через заготовку, ввиду существующей связи между плотностью и оптическими свойствами кварцевого стекла.

Материалы и методы. В качестве объекта испытаний (в рамках виртуального эксперимента) была рассмотрена заготовка (кубик) из кварцевого стекла марки КУ-1 с длиной ребра 30 мм. Определение разноплотности по объему заготовки осуществлялось через серию экспериментов по измерению интенсивности светового луча, прошедшего через заготовку. При этом, для упрощения, рассматривалось прохождение луча в поперечном сечении заготовки (т.е. плоская задача). На рис. 1 представлена расчетно-экспериментальная схема, использованная для идентификации несовершенства в виде разноплотности.ρ

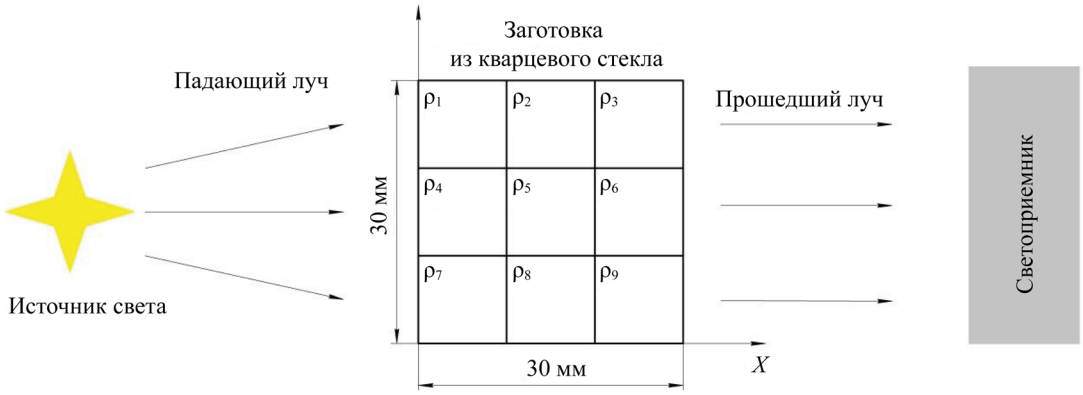


Рис. 1. Расчетно-экспериментальная схема для идентификации разноплотности

В рамках методики была проведена дискретизация сечения заготовки на q элементов, каждому из которых соответствовало свое значение плотности в пределах установленного допуска, характерного для материала. При этом минимальный размер элемента определялся минимальным диаметром светового луча, генерируемого источником света. Для упрощения вычислений в каждом из измерений предполагалось, что световой луч падал по нормали к поверхности заготовки. На основе генерации светового луча постоянной частоты (длины волны) и заданной интенсивности, проводилось измерение интенсивности прошедшего света, что позволило определить поглощающую способность материала. Длина волны выбиралась вдали от оптического резонанса, чтобы сохранить справедливость ранее представленных соотношений для нерезонансного участка [17]. Величина коэффициента поглощения учитывала габариты заготовки, что позволяло фиксировать изменения интенсивности светового луча. В результате измерений интенсивности света, прошедшего через заготовку, на основе закона Бугера формировалась система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решение которой позволяло получить искомое распределение плотности материала.

[1] ГОСТ 15130–86. *Стекло кварцевое оптическое.* Электронный фонд правовых и нормативно-технических документов. URL: https://docs.cntd.ru/document/1200023786 (дата обращения: 10.10.2025).

Известно, что в рамках электромагнитной оптики [18] интенсивность светового луча, прошедшего через сплошную среду, может быть описана законом Бугера-Ламберта-Берра (в гауссовой системе единиц) [19]:

$$I = I_0 \, exp\left(-\delta z\right),$$

где δ — коэффициент поглощения; z — расстояние, прошедшее световым лучем. Учитывая дисперсию света — зависимость оптических свойств среды от частоты проходящей электромагнитной волны, принимая за основу модель дисперсии по Лоренцу, основанную на осцилляторной модели атома, возможно определить связь плотности и коэффициента поглощения:

$$\delta\left(\omega\right) = \frac{\pi N e^2}{mc} \frac{\Gamma}{\left(\omega_0 - \omega\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}},$$

где m и e — масса и заряд возбужденного световой волной электрона; c — скорость света; ω_0 — резонансная частота колебаний электрона; ω — частота световой волны (возбуждения); Γ — коэффициент затухания колебаний; $N = \frac{N_a \rho}{M}$ — количество атомов в единице объема (Na — число Авогадро; M — молярная масса; ρ — плотность среды).

В силу прямо-пропорциональной зависимости коэффициента поглощения от плотности в дальнейшем рассматривалось именно его распределение по объему, подразумевая, что изменение плотности также может быть найдено.

В обеспечение формирования СЛАУ закон Бугера представляется в виде:

$$\sum_{h=1}^{u/2} \left(\frac{z}{ln\left(\frac{I_u}{I_0}\right)} \cdot \frac{\delta_h}{u/2} \right) = -1,$$

где I_u, δ_h — интенсивность прошедшего луча через заготовку для u-го эксперимента и среднее значение показателя поглощения для h-го элемента в u-ом эксперименте, соответственно; $z = const$ — габарит заготовки; $I_0 = const$ — интенсивность генерируемого светового луча. Отметим, что рассматривалась система из q элементов с равным количеством элементов на ребре, из чего следует, что количество уравнений $u = 2 \cdot \sqrt{q}$ при количестве неизвестных $l = h = q$. Записывая СЛАУ в матричной форме, получили:

$$A \cdot x = b,$$

где, $A_{u \times l}$ — основная матрица системы; x_l — вектор неизвестных; b_u — вектор свободных членов.

Предполагая непрерывность и плавность распределения плотности по объему, распределение коэффициента поглощения представляется в виде двумерного полинома p-ой степени. В таком случае количество неизвестных не будет зависеть от количества элементов и будет составлять $l = (p + l)^2$. Наоборот, степень дискретизации системы и количество элементов будет определяться установившимся решением СЛАУ и соответствующей требуемой степенью полинома. Другими словами, появляется возможность управлять данными для решения неопределенной СЛАУ, что важно для анализа получаемых результатов в обеспечение нахождения приближенного решения.

Записывая полином Лежандра при помощи формулы Родрига [20] для каждой из координат (x, y):

$$P^v = P\left(x\right) = CV_t \cdot \frac{1}{2^t \cdot t!} \cdot \frac{d^t}{dx^t}\left(x^2 - 1\right)^t,$$

$$P^w = P\left(y\right) = CW_t \cdot \frac{1}{2^t \cdot t!} \cdot \frac{d^t}{dy^t}\left(y^2 - 1\right)^t,$$

где $t = (0, \ldots, p)$ — константа; P^v, P^w — тензоры первого рода ($v = w = (1, \ldots, t + 1)$); CV_p, CW_p — неизвестные коэффициенты при полиноме; $x(x_h)$, $y(y_h)$ — координаты h-го элемента, искомое распределение показателя поглощения представляется через поэлементную сумму соответствующего тензора второго ранга:

$$\delta_h = sum\left(P^v \otimes P^w\right) = sum\left(\Delta\right) = \sum_{v=1}^{p} \sum_{w=1}^{p} \Delta^{vw}.$$

Псевдорешение (приближенное решение) полученной неопределенной системы уравнений может быть найдено при помощи метода наименьших квадратов [21]:

$$x = A^+ b = V \Sigma^+ U^* b,$$

где, A^+ — псевдообратная матрица Мура-Пенроуза, определенная путем сингулярного разложения (SVD) [21] основной матрицы A.

Необходимо отметить, что при нахождении δ_h, ввиду свойств примененного полинома Лежандра, в частности его ортогональности на интервале [–1, 1], начало системы координат (X, Y) было определено в геометрическом центре заготовки, а решение находилось в безразмерном виде по координате:

$$x = \frac{2 \cdot x_h}{z};\ y = \frac{2 \cdot y_h}{z}.$$

Расчетная оценка распределения разноплотности по объему заготовки (виртуальный эксперимент) была проведена с использованием программного комплекса Matlab. Результаты решений СЛАУ различной размерности приводятся для исходных данных, приведенных в таблице 1.

Таблица 1

Исходные данные для расчета

z, [м]	I_0, [Вт/м^2]	λ, [нм]	$\varkappa_{min}/\varkappa_{max}$
0.03	1000	200	$5{,}768 \cdot 10^{-9}/5{,}432 \cdot 10^{-9}$

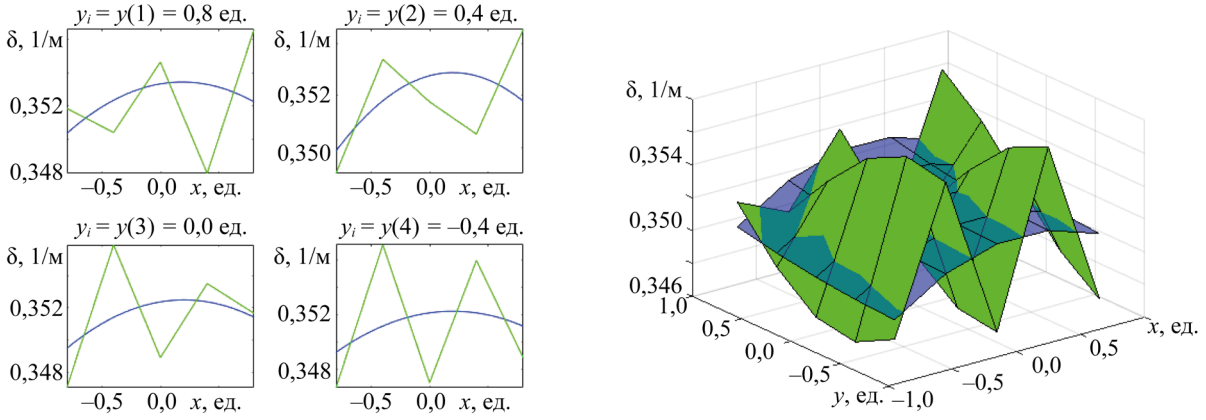
Примечание: значения $\varkappa_{min}/\varkappa_{max}$ приведены в соответствии с номинальным значением для кварцевого стекла[2] и с учетом результатов [22].

В качестве результатов эксперимента, а также для обеспечения возможности контроля достоверности искомого решения, использовался массив данных для I_i (интенсивность луча, прошедшего через заготовку), полученный для следующего распределения коэффициента поглощения:

$$\delta(x, y) = \frac{\delta_{min} + \delta_{max}}{2} + \left(\frac{\delta_{max} - \delta_{min}}{2} \right) \cdot sin(4 \cdot x) \cdot cos(4 \cdot y).$$

Выбранный для примера вариант распределения обусловлен наибольшим влиянием 4-й гармоники возмущения (разноплотности) на расщепление рабочей частоты резонатора ВТГ [9].

Результаты исследования. На рис. 2–5 представлены графики сравнения полученного решения неопределенных СЛАУ различной размерности. На каждом из рисунков (здесь и далее для аналогичных рисунков) зеленым цветом представлено распределение коэффициента поглощения, основанное на точках эксперимента (линейно соединённых) и связанных с дискретизацией в направлении оси X для значения Y, синим — результат решения СЛАУ, т.е. аппроксимации полиномом, что также справедливо для поверхностей распределения. Индекс i при y на подписи рисунков обозначает i-ю координату по y.

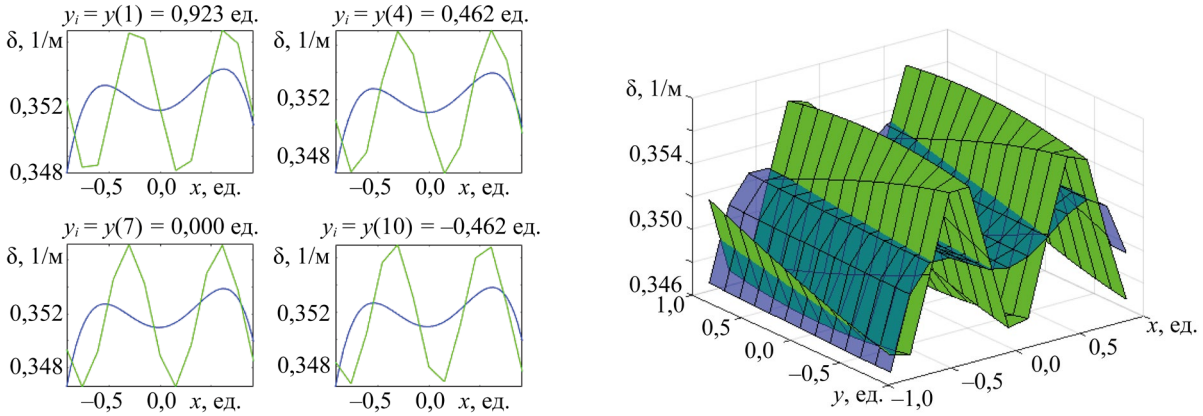


а) *б)*

Рис. 2. Результат решения прямоугольной СЛАУ (p = 2; q = 25), размерность матрицы A — [10×9];
а — двумерный срез распределения коэффициента поглощения по x;
б — трехмерное представление распределения коэффициента поглощения по x, y

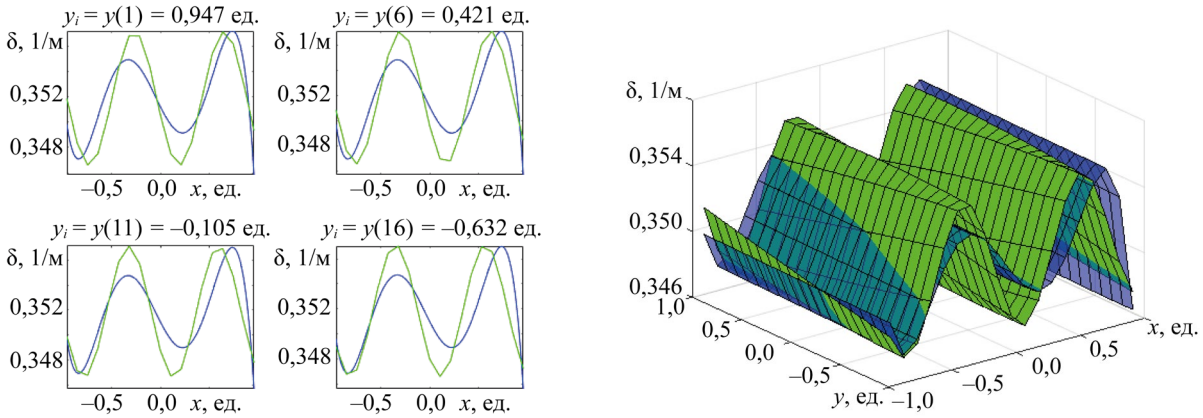
[2] ГОСТ 15130–86. *Стекло кварцевое оптическое.* Электронный фонд правовых и нормативно-технических документов. URL: https://docs.cntd.ru/document/1200023786 (дата обращения: 10.10.2025).

https://vestnik-donstu.ru



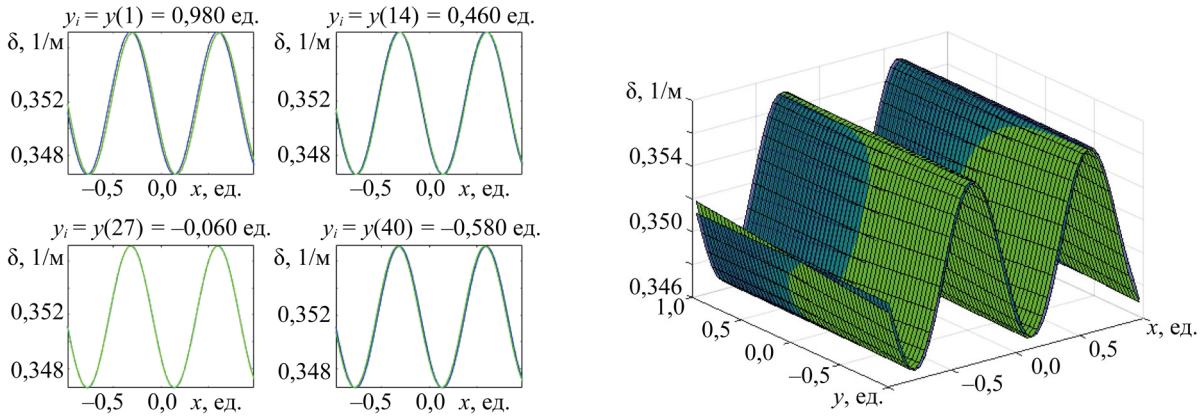
а) *б)*

Рис. 3. Результат решения прямоугольной СЛАУ (p = 4; q = 169), размерность матрицы А — [26×25];
а — двумерный срез распределения коэффициента поглощения по x;
б — трехмерное представление распределения коэффициента поглощения по x, y



а) *б)*

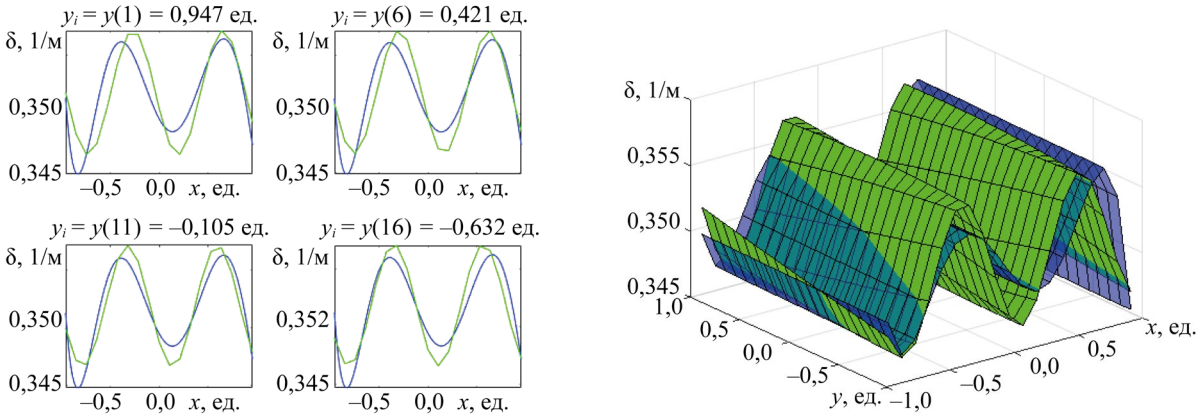
Рис. 4. Результат решения прямоугольной СЛАУ (p = 5; q = 361), размерность матрицы A — [38×36];
а — двумерный срез распределения коэффициента поглощения по x;
б — трехмерное представление распределения коэффициента поглощения по x, y



а) *б)*

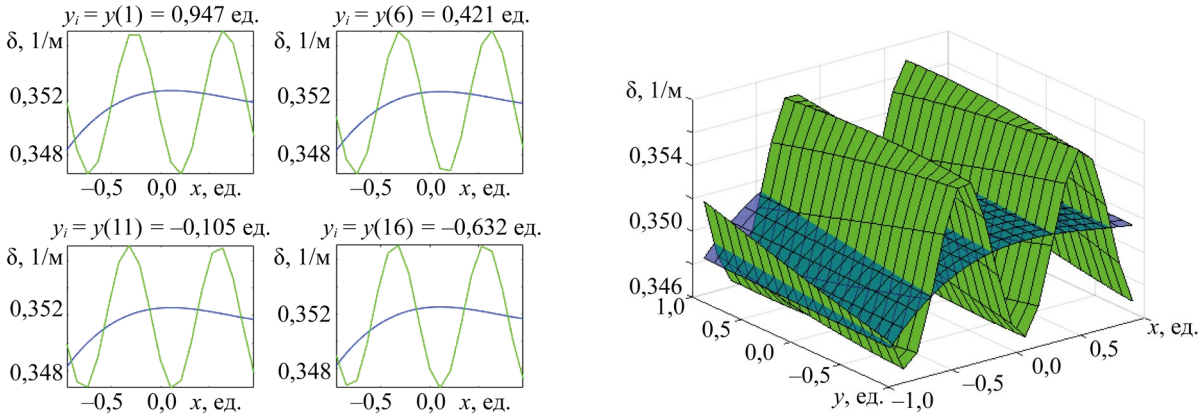
Рис. 5. Результат решения квадратной СЛАУ (p = 9; q = 2 500), размерность матрицы A — [100×100];
а — двумерный срез распределения коэффициента поглощения по x;
б — трехмерное представление распределения коэффициента поглощения по x, y

В дополнение, на рис. 6–9 представлены дополнительные расчетные случаи для обсуждения вопроса разрешимости неопределенных СЛАУ, а также применения предложенного метода при наличии макродефектов заготовки.



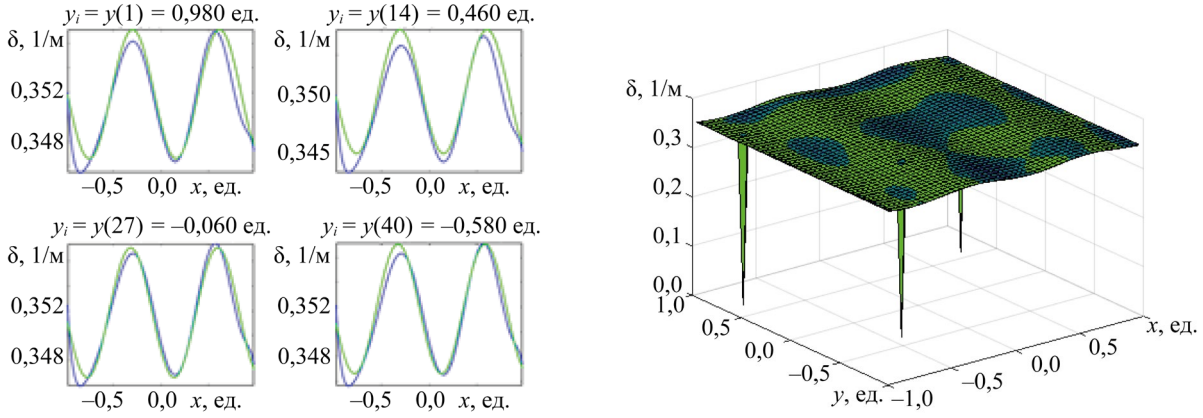
а) *б)*

Рис. 6. Результат решения прямоугольной СЛАУ (p = 6; q = 361), размерность матрицы A — [38×49];
а — двумерный срез распределения коэффициента поглощения по x;
б — трехмерное представление распределения коэффициента поглощения по x, y



а) *б)*

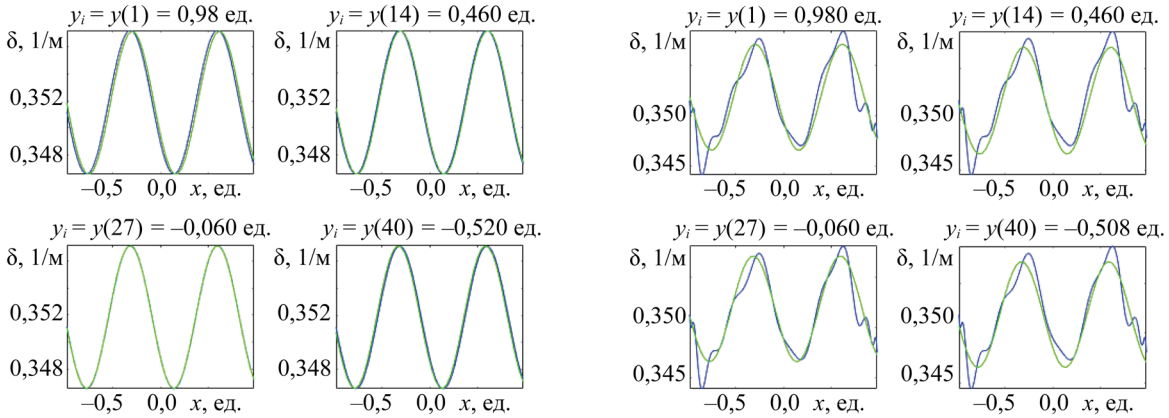
Рис. 7. Результат решения прямоугольной СЛАУ (p = 3; q = 361), размерность матрицы А — [38×16];
а — двумерный срез распределения коэффициента поглощения по x;
б — трехмерное представление распределения коэффициента поглощения по x, y



а) *б)*

Рис. 8. Результат решения квадратной СЛАУ (p = 9; q = 2 500), размерность матрицы A — [100×100];
а — двумерный срез распределения коэффициента поглощения по x;
б — трехмерное представление распределения коэффициента поглощения по x, y

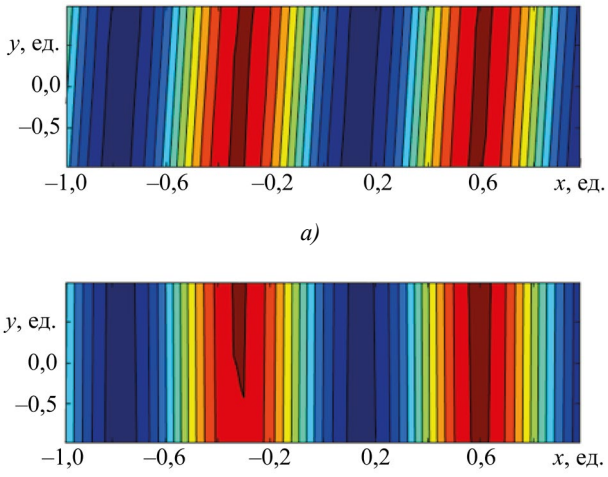
https://vestnik-donstu.ru



а) *б)*

Рис. 9. Результат решения квадратной СЛАУ (p = 20; q = 2500), размерность матрицы A — [100×441];
а — двумерный срез распределения коэффициента поглощения по x для решения без дефектов;
б — двумерный срез распределения коэффициента поглощения по x для решения с дефектами

На рис. 10 по результатам проведенного эксперимента представлены отличия распределения искомой величины от полученного распределения по результатам решения СЛАУ.



а)

б)

Рис. 10. Результат решения квадратной СЛАУ (p = 9; q = 2500), размерность матрицы A — [100×100];
а — распределение искомой величины по экспериментальным данным;
б — распределение искомой величины по результатам решения СЛАУ

Обсуждение. Анализируя полученные данные с использованием предложенного метода идентификации (рис. 2–5), можно отметить, что при достаточном количестве измерений (дискретизации системы) возможно получить решение неопределенной системы с необходимой точностью. Результаты для переопределенных систем оказались сопоставимыми с результатами недоопределенных [23] систем, при этом в некоторых случаях значения уступили им по точности. Например, данные, представленные на рис. 4, продемонстрировали меньшую точность по сравнению с результатами для размерности матрицы А — [38×49], полученной с использованием полинома 6-й степени (рис. 6).

В случае значительного перекоса между количеством уравнений и неизвестных (например, для случая сильной переопределенности — рис. 7) удовлетворительное решение в рамках представленных вычислений найти не удалось. Даже при получении приближенного решения с минимальной ошибкой некоторые отличия между восстановленным распределением и экспериментальным все же присутствовали. Это может быть связано с особенностями предложенной методики, что требует отдельного изучения. Для наглядности на рис. 10 представлено сравнение распределений в цветовом градиенте.

Одновременно было установлено, что предложенный метод чувствителен к наличию макродефектов (поры, пузырьки) в заготовке. На рис. 8 представлен результат, полученный на основе экспериментальных данных с тремя точечными дефектами, которым соответствует нулевой коэффициент поглощения. При сравнении с рис. 5 (где представлены результаты с наибольшей точностью) видно, что распределение искажается, на графике появляется дополнительная низкочастотная гармоника, свидетельствующая о возможных дефектах. При повышении степени полинома решение продолжает меняться, описывая более сложное распределение (рис. 9).

Следует отметить, что в случае физического измерения наличие макродефектов может значительно повлиять на результаты, так как это нарушает допущение о нормальном падении луча на границу раздела оптически прозрачных сред (поры и пузырьки часто имеют криволинейные поверхности). Несмотря на это, представленный метод может быть усовершенствован, учитывая указанные аспекты.

Использование полинома повысило устойчивость решения прямоугольных СЛАУ. Однако следует помнить, что реальные системы, построенные на базе экспериментальных данных с определенными погрешностями измерений, создают дополнительные сложности, требующие применения других методов расчета СЛАУ, например, с регуляризацией решения [24]. Поэтому целесообразно избегать существенной недоопределенности и переопределенности системы. В защиту используемого метода решения СЛАУ необходимо отметить, что требуется оптимизация соотношения между степенью полинома и уровнем дискретизации для нахождения приближенного решения с минимальными затратами. Анализ полученной системы уравнений показывает, что даже для двумерного случая с уменьшением размера элемента система остается прямоугольной и становится все более недоопределенной — в таких системах количество уравнений (u) меньше количества неизвестных (l). Подобные СЛАУ имеют более одного решения и характеризуются высоким числом обусловленности основной матрицы системы (матрицы A), что может привести к существенным трудностям при нахождении корней. Учитывая это, в целях управления соотношением количества уравнений и неизвестных было принято допущение о плавности и непрерывности распределения искомой величины по объему. Это допущение основано на использовании кварцевого стекла наивысшего качества для изготовления резонатора ВТГ, в котором не допускается наличие макродефектов[3] (пузыри, раковины, трещины) [25]. Данное предположение согласуется с определяющими соотношениями, которые действуют как для постоянного значения показателя преломления, так и для медленно меняющейся, непрерывной функции в оптической среде [19].

Говоря о практической реализуемости, необходимо оценить требуемую погрешность физических измерений. Как отмечалось ранее [22], максимальный разброс плотности для кварцевого стекла по объему заготовки (резонатора), обусловленный неидеальностью геометрических параметров элемента ячейки периодичности, составляет ±3 % от номинального значения. Из-за пропорциональной зависимости коэффициента поглощения от плотности разброс коэффициента поглощения по объему будет аналогичным. При этом степень влияния разброса коэффициента поглощения на значение интенсивности светового луча, прошедшего через заготовку, можно оценить на уровне 0,03 %. Следовательно, степень точности измерений должна составлять не менее 0,005 %. Достижение такой точности требует определенного подхода к организации натурного эксперимента, в частности, использования стабильных источников света (лазеров) с активной обратной связью для термической и токовой стабилизации, светоприемников (фотодетекторов) с низким темновым током, а также подавления шумов различных источников (колебания температуры, вибрация, электромагнитные помехи и пр.), что в итоге позволит достичь точности порядка 0,001 %.

Заключение. Таким образом, в настоящей работе был предложен и апробирован метод идентификации несовершенства в виде разноплотности кварцевого стекла на стадии заготовки, предназначенной для изготовления чувствительного элемента ВТГ — резонатора. Идентификация основывалась на оптических свойствах кварцевого стекла, а именно на комплексном коэффициенте преломления, мнимая часть которого связана с коэффициентом поглощения и, следовательно, с плотностью материала. Показано, что, проведя серию экспериментов по измерению интенсивности светового луча, прошедшего через заготовку, возможно восстановить неизвестное распределение коэффициента поглощения и плотности по объему с высокой точностью (не менее 0,005 % от измеряемой величины). При этом распределение представляется с использованием ортогонального полинома Лежандра достаточной степени, соблюдая оптимальное соотношение между количеством коэффициентов полинома и степенью дискретизации системы, определяемой величиной гармоники распределения несовершенства. Установлено, что для идентификации 4-й гармоники разноплотности (как ключевого параметра) можно использовать полином 9-й степени при 100 испытаниях. Важно отметить, что проведение таких работ на ранних стадиях производства может оптимизировать процесс формообразования, позволяя выбирать наиболее эффективные направления распределения плотности по объему для минимизации воздействия на расщепление рабочей частоты резонатора.

[3] ГОСТ 15130–86. *Стекло кварцевое оптическое.* Электронный фонд правовых и нормативно-технических документов. URL: https://docs.cntd.ru/document/1200023786 (дата обращения: 31.10.2025).

Список литературы / References

1. Пешехонов В.Г. Перспективы развития гироскопии. *Гироскопия и навигация*. 2020;28(2):3–10.

Peshekhonov VG. The Outlook for Gyroscopy. *Gyroscopy and Navigation*. 2020;11:193–197. https://doi.org/10.1134/S2075108720030062

2. Переляев С.Е. Современное состояние волновых твердотельных гироскопов. Перспективы развития в прикладной гироскопии. В: *Труды XXX юбилейной Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам.* Санкт-Петербург: Концерн «Центральный научно-исследовательский институт «Электроприбор»; 2023. С. 431–435.

Perelyaev SE. Current State of Wave Solid-State Gyroscopes. Development Prospects in Applied Gyroscopy. In: *Proc. XXX Anniversary St. Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems.* St. Petersburg: Central Scientific Research Institute “Electropribor”; 2023. p. 431–435. (In Russ.)

3. Волчихин И.А., Волчихин А.И., Малютин Д.М., Матвеев В.В., Распопов В.Я., Телухин С.В. и др. Волновые твердотельные гироскопы (аналитический обзор). *Известия Тульского государственного университета. Технические науки.* 2017;(9–2):59–78.

Volchikhin AI, Volchikhin DM, Malyutin DM, Matveev VV, Raspopov VYa, Telukhin SV, et al. Wave Solid-State Gyroscopes (Analytical Review). *News of Tula State University*. *Technical Sciences.* 2017;(9–2):59–78.

4. Шишаков К.В., Хворенков В.В. *Твердотельные волновые гироскопы: волновые процессы, управление, системная интеграция.* Монография. Ижевск: Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова; 2018. 264 с.

Shishakov KV, Khvorenkov VV. *Solid-State Wave Gyroscopes: Wave Processes, Control, System Integration*. Monograph. Izhevsk: Kalashnikov Izhevsk State Technical University; 2018. 264 p. (In Russ.)

5. Маслов А.А., Маслов Д.А., Ниналалов И.Г., Меркурьев И.В. Волновые твердотельные гироскопы: обзор публикаций. *Гироскопия и навигация.* 2023;31(1):3–25.

Maslov AA, Maslov DA, Ninalalov IG, Merkuryev IV. Hemispherical Resonator Gyros (An Overeview of Publications). *Gyroscopy and Navigation*. 2023;14(1):3–25. https://doi.org/10.1134/S2075108723010054

6. Delhaye F. HRG by Safran: The Game-Changing Technology. In: *Proc. IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems (INERTIAL).* New York City: IEEE; 2018. P. 173–177. https://doi.org/10.1109/ISISS.2018.8358163

7. Переляев С.Е. Современное состояние и научно-технический прогноз перспектив применения зарубежных волновых твердотельных гироскопов (аналитический обзор по зарубежным материалам). *Новости навигации.* 2020;(3):14–28.

Perelyaev SE. Current State and Scientific and Technical Forecast of the Perspectives of Application of Foreign Hemispherical Resonator Gyros (Analytical Review of Foreign Materials). *Navigation News*. 2020;(3):14–28.

8. Климов Д.М., Журавлев В.Ф., Жбанов Ю.К. *Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп).* Монография. Москва: Ким Л.А.; 2017. 193 с.

Klimov DM, Zhuravlev VF, Zhbanov YuK. *Quartz Hemispherical Resonator (Solid-State Wave Gyroscope)*. Monograph. Moscow: Kim L.A.; 2017. 193 p. (In Russ.)

9. Лунин Б.С., Матвеев В.А., Басараб М.А. *Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технология*. Москва: Радиотехника; 2014. 176 с.

Lunin BS, Matveev VA, Basarab MA. *Wave Solid-State Gyroscope: Theory and Technology*. Moscow: Radiotekhnika; 2014. 176 p. (In Russ.)

10. Меркурьев И.В., Подалков В.В. *Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов*. Москва: Физматлит; 2009. 226 с.

Merkuryev IV, Podalkov VV. *Micromechanical and Wave Solid-State Gyroscope Dynamics*. Moscow: Fizmatlit; 2009. 226 p. (In Russ.)

11. Lynch DD. Vibratory Gyro Analysis by The Method of Averaging. In: *Proc. 2nd St. Petersburg Int. Conf. on Gyroscopic Technology and Navigation.* St. Petersburg: Centr. Sci.-Res. Inst. “Elektropribor”; 1995. P. 26–34.

12. Rozelle D. The Hemispherical Resonator Gyro: From Wineglass to the Planets. *Advances in the Astronautical Sciences*. 2009;134:1157–1178.

13. Polunin PM, Shaw SW. Self-Induced Parametric Amplification in Ring Resonating Gyroscopes. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017;94:300–308. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.01.011

14. Zotov SA, Trusov AA, Shkel AM. Three-Dimensional Spherical Shell Resonator Gyroscope Fabricated Using Wafer-Scale Glassblowing. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 2012;21(3):509–510. https://doi.org/10.1109/JMEMS.2012.2189364

15. Saypulaev MR, Merkuryev IV, Solovyev AV, Tarasov AN. Study on Free Oscillations of a Micromechanical Gyroscope taking into Account the Nonorthogonality of the Torsion Axes. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2021;21(3):231–238. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2021-21-3-231-238

16. El-Sheimy N, Youssef A. Inertial Sensors Technologies for Navigation Applications: State of the Art and Future Trends. *Satellite Navigation.* 2020;1(2):1–22. https://doi.org/10.1186/s43020-019-0001-5

17. Салех Б., Тейх М. *Оптика и фотоника. Принципы и применение.* В 2 т., Т. 2., 2-е изд. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект»; 2012. 760 с.

Saleh B, Teich M. *Optics and Photonics: Principles and Applications*, 2nd ed. In 2 vol. Vol. 2. Dolgoprudnyi: Intellekt; 2012. 760 p. (In Russ.)

18. Born M, Wolf E. *Principles of Optics: 60th Anniversary Edition,* Cambridge: Cambridge University Press; 2019. 992 p.

19. Ахманов С.А., Никитин С.Ю. *Физическая оптика.* 2-е изд., Москва: Издательство Московского университета «Наука»; 2004. 654 с.

Akhmanov SA, Nikitin SYu. *Physical Optics*. 2nd ed. Moscow: Nauka; 2004. 654 p. (In Russ.)

20. Корн Г.А., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения. Теоремы. Формулы*. 6 изд. Санкт-Петербург: Лань; 2003. 831 с.

Korn GA, Korn Th. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions. Theorems. Formulas,* 6th ed. St. Petersburg: Lan'; 2003. 831 p. (In Russ.)

21. Деммель Дж. *Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения.* Москва: Мир; 2001. 430 с.

Demmel JW. *Computational Linear Algebra. Theory and Applications*. Moscow: Mir; 2001. 430 p. (In Russ.)

22. Шевченко С.А., Мельников Б.Е. Несовершенства кварцевого стекла и их влияние на динамику резонатора ВТГ. *Известия Саратовского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2024;24(4):611–618. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-611-618

Shevchenko SA, Melnikov BE. Fused Quartz Imperfections and Their Influence on the CVG Resonator Dynamics. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics.* 2024;24(4):611–618. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-611-618

23. Björck Å. *Numerical Methods in Matrix Computations.* New York, NY: Springer; 2015. 800 p.

24. Buccini A, Gazzola S, Onisk L, Pasha M, Reichel L. Projected Iterated Tikhonov in General Form with Adaptive Choice of the Regularization Parameter. *Numerical Algorithms.* 2025;100:1617–1637. https://doi.org/10.1007/s11075-025-02072-2

25. Бубис И.Я., Вейденбах В.А., Духопел И.И., Кузнецова С.М. (ред.), Окатова М.А. (ред.). *Справочник технолога-оптика.* Ленинград: Ленинградское отделение издательства «Машиностроение», 1983. 414 с.

Bubis Iya, Weidenbach VA, Dukhoped II, Kuznetsova SM (ed), Okatova MA (ed). *Handbook of an Optical Technologist*. Leningrad: Mashinostroenie; 2009. 244 p. (In Russ.)

***Об авторах*:**

Сергей Александрович Шевченко, инженер, «Высшая школа механики и процессов управления. Физико-механический институт» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29 Б), SPIN-код, ResearchGate, ORCID, ScopusID, shevchenko.sergei.a@yandex.ru

Иван Алексеевич Попов, старший преподаватель, «Высшая школа передовых инженерных технологий передовой инженерной школы «Цифровой инжиниринг» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29 Б), SPIN-код, ResearchGate, ORCID, popov_ia@spbstu.ru

Борис Евгеньевич Мельников, доктор технических наук, профессор, «Высшая школа механики и процессов управления. Физико-механический институт» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29 Б), SPIN-код, ResearchGate, ORCID, melnikov_be@spbstu.ru

***Заявленный вклад авторов*:**

С.А. Шевченко: разработка концепции, проведение исследования,

И.А. Попов: разработка программного обеспечения.

Б.Е. Мельников: научное руководство.

Конфликт интересов: **авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

***About the Authors*:**

Sergei A. Shevchenko, Engineer of the Higher School of Mechanics and Control Processes, Institute of Physics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 B, Polytechnicheskaya Str., St. Petersburg, 195251, Russian Federation), SPIN-code, ResearchGate, ORCID, ScopusID, shevchenko.sergei.a@yandex.ru

Ivan A. Popov, Senior Lecturer at the Advanced Engineering Technology School, Advanced Engineering School "Digital Engineering", Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 B, Polytechnicheskaya Str., St. Petersburg, 195251, Russian Federation), SPIN-code, ResearchGate, ORCID, popov_ia@spbstu.ru

Boris E. Melnikov, Dr.Sci (Eng.), Professor of the Higher School of Mechanics and Control Processes, Institute of Physics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 B, Polytechnicheskaya Str., St. Petersburg, 195251, Russian Federation), SPIN-code, ResearchGate, ORCID, melnikov_be@spbstu.ru

***Claimed Contributorship*:**

SA Shevchenko: conceptualization, investigation.
IA Popov: software.
BE Melnikov: supervision.

Conflict of Interest Statement: **the authors declare no conflict of interest.**

All authors have read and approved the final version of manuscript.

Поступила в редакцию / Received 04.08.2025
Поступила после рецензирования / Reviewed 01.09.2025
Принята к публикации / Accepted 12.09.2025